

Hybride Systeme - Algebraische Charakterisierung und spieltheoretische Annäherung

Peter Höfner

Überblick

- Hybride Systeme
- algebraische Charakterisierungen
- Spieltheoretische Annäherung hybrider Systeme
- Ausblick

1 Hybride Systeme

Die Dynamik natürlicher und künstlicher Systeme zeichnet sich häufig dadurch aus, dass sie an einigen Stellen *kontinuierlich* und an anderen *diskret* ist. Systeme mit einer solchen Dynamik werden als *hybride Systeme* bezeichnet.

- Zeit-diskret / Zeit-kontinuierlich
- Wert-diskret / Wert-kontinuierlich

Systemarten

Transformationelle Systeme

berechnen eine Funktion

Reaktive Systeme

interagieren mit ihrer Umgebung

Echtzeitsysteme

müssen Ergebnisse in bestimmten Zeitintervallen produzieren

Hybride Systeme

besitzen kontinuierliche und diskrete Komponenten

Quelle: Universität Oldenburg

Wissen

- *kontinuierliche Systeme:*
Kontrolltheorie, Numerik, kontinuierliche Mathematik
- *diskrete Systeme:*
diskrete Mathematik, (theoretische) Informatik
- *hybride Systeme:*
??? (seit Anfang der 90er Jahre)
verschiedenste Ansätze: Petrinetze, Simulation, ...

Anwendungen

- *Biohybride Systeme:*

Fraunhofer-Institut für Biomedizinische Technik (IBMT)

- *Verkehrssysteme* (z.B. für Flugzeuge)

- *Hybride Systeme zur Ortung von PKWs:*

Ingenieurgesellschaft für kinematische Vermessung (IkV)

- *aktive Datenbanken*

(soweit das Auslösen bestimmter Events betroffen ist)

- *chemische Produktionsanlagen*

- ...

Standardbeispiele für hybride Systeme:

- *(Generalized) Railroad Crossing*
 - Bahnübergang mit einer Straße und k Bahngleisen
 - Sicherheitsanforderungen an Schranke
- *gas burner example*
 - Gasleitung mit eventuellen Lecks
 - Sicherheitsanforderungen an Gasleitung

2 Algebraische Charakterisierungen

- Grundlagen
- Charakterisierung durch Intervalle
- Charakterisierung durch Funktionen
- Vergleich

Definition 2.1 Ein *Halbring* ist ein Quintupel $(A, +, 0, \cdot, 1)$, wobei

- $(A, +, 0)$ ein kommutatives,
- $(A, \cdot, 1)$ ein Monoid ist,
- die Multiplikation über die Addition distributiert und
- $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ (*Annihilator*) ist.

Ein Halbring heißt *idempotent*, falls $a + a = a$ gilt;
er heißt *boolesch*, falls der zugrunde liegende Verband boolesch ist.

Definition 2.2 Eine *Kleene-Algebra* ist ein Sextupel

$(A, +, 0, \cdot, 1, *)$, wobei

$(A, +, 0, \cdot, 1)$ ein idempotenter Halbring ist und

folgende Gesetze erfüllt sind:

$$1 + a \cdot a^* \leq a^*,$$

$$1 + a^* \cdot a \leq a^*$$

$$b + a \cdot c \leq c \Rightarrow a^* \cdot b \leq c, \quad b + c \cdot a \leq c \Rightarrow b \cdot a^* \leq c$$

Unsere erste Charakterisierung hybrider Systeme basiert auf Intervallen.

Definition 2.3 Ein *Intervall* auf einer geordneten Menge $(M, \leq)$ ist definiert als

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in M, a \leq x \leq b\}$$

■ Beispiel Produkt-(Pareto-)ordnung:

$$[(a_1, a_2), (b_1, b_1)] = \{(x_1, x_2) : a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}$$

Definition 2.4 Auf Intervallen können wir eine *Intervallkomposition* ; $\text{Int} \times \text{Int} \rightarrow \text{Int}$ definieren.

$$[a, b] ; [c, d] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} [a, d] & \text{falls } a = b \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 2.5 $S \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}(\text{Int}), \cup, \emptyset, ;, \mathbb{1}_{\text{Int}})$ ist ein Halbring, falls ; auf Mengen erweitert wird

$$A ; B \stackrel{\text{def}}{=} \{a ; b \quad : \quad a \in A, b \in B, A, B \in \mathcal{P}(\text{Int})\}$$

- $\mathbb{1}_{\text{Int}} \stackrel{\text{def}}{=} \{[a, a] \quad : \quad a \in M\}$
- durch endliche Iteration (*-Operator) zu Kleene-Algebra erweiterbar
- Funktionen $f : \mathcal{P}(\text{Int}) \rightarrow V$ können nun kontinuierliche Verläufe beschreiben
- f eingeschränkt auf $I \subseteq \mathbb{1}_{\text{Int}}$ beschreibt Zeit-diskrete Verläufe
- f eingeschränkt auf $P \subseteq V$, P diskret, beschreibt diskrete Wert-Verläufe

Als zweites Beispiel betrachten wir anstelle der Intervalle Funktionen als Grundmenge (vgl. [Sintzoff03]).

Hierzu sei V eine endliche Menge von Zuständen (*Wertemenge*) und G eine Menge von Intervalllängen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $(\mathbb{N} \times \mathbb{R})$, ...).

Definition 2.6 Eine *Trajektorie* t ist ein Paar (d, g) , wobei $d \in G$ und $g : [0, d] \rightarrow P$, $P \subseteq V$.

Ähnlich wie die Intervallkomposition können wir auch hier eine Komposition definieren.

Seien (d_1, g_1) und (d_2, g_2) Trajektorien über der Wertemenge V

$$(d_1, g_1) \cdot (d_2, g_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (d_1 + d_2, g) & \text{falls } g_1(d_1) = g_2(0) \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $g(x) = g_1(x) \quad \forall x \in [0, d_1]$ und $g(x + d_1) = g_2(x) \quad \forall x \in [0, d_2]$

- d bezeichnen wir als *Länge* der Trajektorie, P als *Wertebereich*
- $(d_1, g_1) \cdot (0, g_2) = (d_1, g_1)$ oder undefiniert
- *Prozesse* sind Mengen von Trajektorien
- $[d]P \stackrel{\text{def}}{=} \{(d, g) : g : [0, d] \rightarrow P\}, P \subseteq V$

Definition 2.7 Durch Mengenbetrachtung erhalten wir einen (booleschen) Halbring

$$\text{PRO} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{P}([]V), \cup, \emptyset, \cdot, [0]V)$$

wobei $[]V \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_d [d]V$

- durch endliche Iteration (*-Operator) zu Kleene-Algebra erweiterbar
- $[d]P \in \mathcal{P}([]V)$
- Ist $G = \{0, 1\}$ entspricht PRO den Relationen
- große Ähnlichkeit mit Funktionenräumen der Linearen Algebra
- $[d]P$, P diskret, beschreibt diskrete Wert-Verläufe
- $[0]Q \subseteq [0]V$ beschreibt Zeit-diskrete Verläufe

Vergleich der beiden algebraischen Charakterisierungen:

- beide sind boolesche Halbringe:
die Operationen $\cup$, $\cap$, $\bigcup$, $\bigcap$, $\neg$ existieren
- S hat einfachere Grundobjekte
- bessere Modellierung verschiedener Funktionen in PRO möglich

Zusammenhang zu hybriden Systemen:

- Funktionen auf/in diesen Modellen repräsentieren die Kontinuierlichkeit der hybriden Systeme
- Teilmengen von $\mathbb{1}_{\text{Int}}$ bzw. $[0]V$ spiegeln die Diskretheit wider.
In Halbringen werden diese Elemente *Prädikate* oder *Tests* genannt. Im Folgenden bezeichnet p einen Test und $\text{test}(K)$ die Menge aller Tests des Halbrings K .

3 Spieltheoretische Annäherung

Im folgenden beschäftigen wir uns näher mit booleschen Kleene-Algebren und versuchen durch diese die algebraische Struktur hybrider Systeme besser verstehen und berechnen zu können (vgl. [Backhouse02], [Möller03], [Sintzoff03]).

Überblick

- Spiele und hybride System
- Modalitäten

Definition 3.1 Ein *Spiel* besteht aus einem oder mehreren *Spielern*, welche miteinander interagieren.

Spielarten:

- endliche / unendliche Zugdauer
- endliche / unendliche Spieldauer
- endliche / unendliche Anzahl von Zugmöglichkeiten
- manche Mitspieler können kooperieren
- Spielzüge können sich zeitlich überschneiden

Warum Spieltheorie zur Annäherung?

Ein hybrides System kann als Spiel interpretiert werden. Dabei sind die *kontrollierenden* und die *kontrollierten* Komponenten die Spieler und Gegner.

- die kontrollierenden Komponenten entsprechen meistens den diskreten Anteilen des hybriden Systems,
- die kontrollierten den kontinuierlichen Teilen
- Elemente aus PRO charakterisieren Mengen von Spielzügen (Möglichkeiten)

Im Folgenden wollen wir uns auf disjunkte diskrete Spiele mit endlicher Spielzugdauer beschränken.

- $(S_1 \cdot S_2 \cdots S_n)$ stellt eine *Spielrunde* dar,
- $(S_1 \cdot S_2 \cdots S_n)^*$ ein endliches Spiel.
- $(S_1 \cdot S_2 \cdots S_n)^\omega$ beschreibt unendlich andauernde Spiele in ω -Algebren.

In hybriden Systemen (bzw. in Spielen) ist es entscheidend, Aussagen über die Existenz oder Nicht-Existenz (Allquantor) von Eigenschaften treffen zu können.

Wiederholen wir zu diesem Zwecke das Konzept der *modalen Halbringe*.

Definition 3.2 Ein *modaler Halbring* K ist ein Halbring mit einer zusätzlichen *domain*-Operation $\lceil _ : K \rightarrow \text{test}(K)$, so dass

$$a = \lceil a \cdot a \quad \lceil (p \cdot a) \leq p \quad \lceil (a \cdot \lceil b) = \lceil (a \cdot b)$$

Eine *modale Kleene-Algebra* (MKA) ist eine Kleene-Algebra, deren zugrunde liegender Halbring modal ist.

Analog kann man eine *codomain*-Operation $\lceil _ : K \rightarrow \text{test}(K)$ definieren.

Definition 3.3 In einem modalen Halbring können wir modale Operatoren *Diamond* und *Box* definieren:

$[-\rangle, [-], \langle -|, [-| : K \rightarrow \text{test}(K) \rightarrow \text{test}(K)$ by

$$\begin{aligned} |a\rangle p &\stackrel{\text{def}}{=} \top(a \cdot p) & \langle a|p &\stackrel{\text{def}}{=} (p \cdot a)^\top \\ |a]p &\stackrel{\text{def}}{=} \neg |a\rangle \neg p & [a|p &\stackrel{\text{def}}{=} \neg \langle a| \neg p \end{aligned}$$

Diamond und Box beschreiben die mögliche bzw. die garantierte Erreichbarkeit unter a -Schritten.

In einem Spiel mit 2 Spielern können wir bezüglich Gewinnbarkeit eine Spielrunde als folgendes Produkt interpretieren.

$$|a\rangle \cdot |a]$$

Verläufe endlicher bzw. unendlicher Spiele können wir also durch

$$(|a\rangle \cdot |a])^* \text{ bzw. } (|a\rangle \cdot |a])^\omega$$

beschreiben und durch Fixpunktiteration (z.B. *Satz von Kleene*) berechnen.

Eine Verallgemeinerung in booleschen Kleene-Algebren (wie PRO) sind folgende Beschreibungen

$$\lceil (a \sqcap w) \quad \text{und} \quad \neg \lceil (a \sqcap \overline{w})$$

Die Verallgemeinerung besteht in der Einschränkung auf w , so dass der Domain-Operator auf einen Teil der Grundmenge eingeschränkt wird.

Betrachten wir in PRO w als *Spezifikation*, eine Teilmenge von $\mathcal{P}([]V)$, die nur mögliche Konfigurationen von Spielen bzw. hybriden Systemen darstellen, bedeuten sie folgendes:

- Existenzquantor

$$\Vdash(a \sqcap w) = \{x : \exists (d, g) \in a : g(0) = x, (d, g) \in w\}$$

- Allquantor

$$\neg \Vdash(a \sqcap \overline{w}) = \{x : \forall (d, g) \in a : g(0) = x, (d, g) \in w\}$$

Ausblick

- Gewinn und Verluststellungen ([DesharnaisMöllerStruth03])
- Zusammenfassen von unterschiedlichen Ergebnissen (Sintzoff[03],[Möller03],...)
- Verallgemeinerung von Ergebnissen
- Simulation über *Lazy Kleene-Algebren* [Möller04]
- Neue Kalküle und Sicherheitsaussagen
- Verbesserte Steuerung hybrider Systeme durch Spieltheorie