Dann klappt's auch mit den Nachbarn

oder:

Von temporaler Intervalllogik zu Nachbarschaftslogik

Peter Höfner

26. Mai 2008

 ©Peter Höfner

Teil I

Temporale Intervalllogik (ITL)

Hintergrund

- eingeführt 1983 von B. Moskowski, J. Halpern und Z. Manna
- ursprünglich war ITL eine
  - diskrete,
  - lineare temporale Logik
  - für *endliche* und *unendliche* Zeit

Ausdrucksmächtigkeit

- für endliche, nichtleere Wörter ist ITL gleichmächtig zu
  - endlichen Automaten,
  - regulären Ausdrücken,
  - quantifizierte propositionaler Temporallogik für endliche Zeit [Manna und Pnueli]
  - WS1S [Büchi].
- für ω-Wörter ist ITL ist gleichmächtig zu
  - Büchi Automaten,
  - ω-reguläre Ausdrücke
  - S1S,
  - quantifizierte propositionaler Temporallogik für unendliche Zeit.

Intervalle

Definition
ein Zustand ist eine Abbildung *State* von der Menge der Variablen zu der Menge ihrer Werte

$$State : Var \rightarrow Val$$

zum Beispiel: $\sigma_0(Account) = 2000$

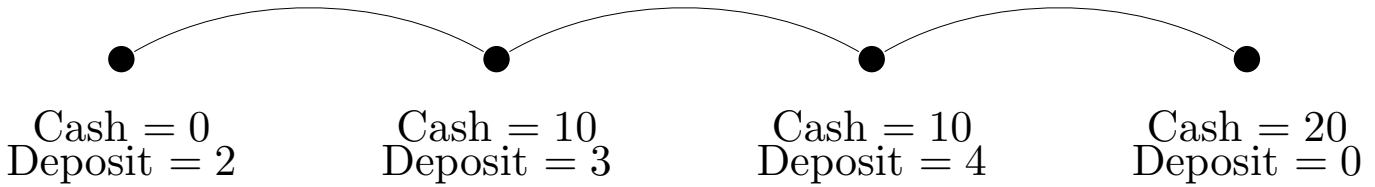
Definition
ein Intervall σ ist eine (un)endliche Sequenz von Zuständen

$$\sigma : \sigma_0\sigma_1\sigma_2 \ldots$$

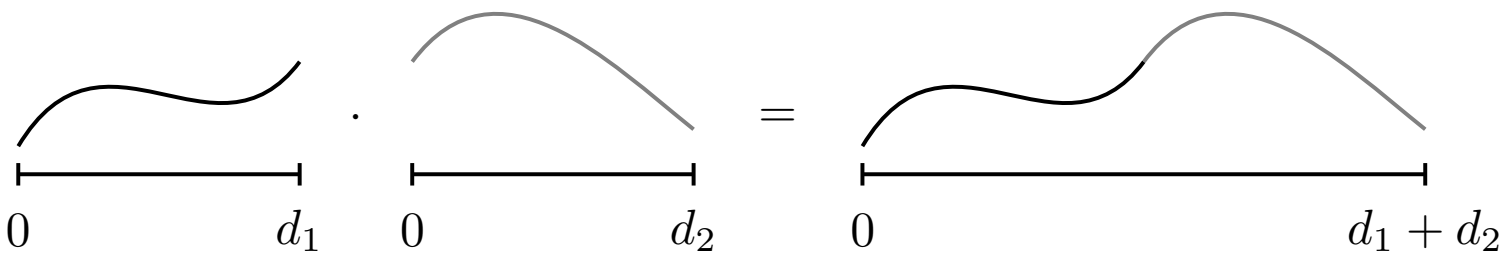
zum Beispiel: $\sigma : \sigma_0\sigma_1$ mit $\sigma_0(Account) = 2000$, $\sigma_0(Id) = 5$, $\sigma_1(Account) = 5000$ und $\sigma_1(Id) = 5$

Beispiele für Intervalle

- diskret (klassisch)



- kontinuierlich (non-klassisch)



Temporale Intervalllogik

Syntax

die Menge von ITL-Termen is gegeben durch

$$\Theta ::= x \mid v \mid f^n(\underbrace{\Theta, \ldots, \Theta}_{n})$$

die Menge von ITL-Formeln ist gegeben durch

$$\phi ::= X \mid G^n(\underbrace{\Theta, \ldots, \Theta}_{n}) \mid \neg\phi \mid \phi \vee \phi \mid (\forall x)\phi \mid \mathsf{skip} \mid \phi^\frown\phi \mid \phi^*$$

x : zeitunabhängige Variablen
v : temporale Variablen
f^n : zeitunabhängige globale Funtion

X : temporale propositionale Variablen
G^n : zeitabhängige globale relationale Symbole

Temporale Intervalllogik

Semantik (ein Teil)

$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi \vee \psi$	gdw.	$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi$ oder $\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \psi$
$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} (\forall x)\phi$	gdw.	$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}'} \phi$ für alle $\mathcal{V}'$ die mit $\mathcal{V}$ in allen globalen Variablen ausser x übereinstimmen
$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}}$ skip	gdw.	$\lvert\sigma\rvert = 1$
$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi^\frown\psi$	gdw.	$\big(\exists k : \sigma_0 \ldots \sigma_k \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \psi$ and $\sigma_k \ldots \sigma_{\lvert\sigma\rvert} \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi\big)$ oder $\big(\sigma$ ist unendlich and $\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi\big)$

$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi$: ϕ gilt für eine Interpretation $\mathcal{J}$, eine Wert-Zuweisung $\mathcal{V}$ und ein Intervall σ.

Temporale Intervalllogik

Semantik (ein Teil)

$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi \vee \psi$	gdw.	$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi$ oder $\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \psi$
$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} (\forall x)\phi$	gdw.	$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}'} \phi$ für alle $\mathcal{V}'$ die mit $\mathcal{V}$ in allen globalen Variablen ausser x übereinstimmen
$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}}$ skip	gdw.	$\lvert\sigma\rvert = 1$
$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi^\frown\psi$	gdw.	$\big(\exists k : \sigma_0 \ldots \sigma_k \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \psi$ and $\sigma_k \ldots \sigma_{\lvert\sigma\rvert} \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi\big)$ ~~oder $\big(\sigma$ ist unendlich and $\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi\big)$~~

$\sigma \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \phi$: ϕ gilt für eine Interpretation $\mathcal{J}$, eine Wert-Zuweisung $\mathcal{V}$ und ein Intervall σ.

Mehr Formeln

$$
\begin{array}{rcll}
\phi \wedge \psi & =_{df} & \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) & \text{(und)} \\
\phi \rightarrow \psi & =_{df} & \neg\phi \vee \psi & \text{(impliziert)} \\
(\exists x)\phi & =_{df} & \neg(\forall x)\neg\phi & \text{(für alle)} \\
\text{if } \phi \text{ then } \psi \text{ else } \chi & =_{df} & (\phi \wedge \psi) \vee (\neg\phi \wedge \chi) & \text{(if then else)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\bigcirc\phi & =_{df} & \text{skip}^\frown\phi & \text{(next)} \\
\textcircled{W}\phi & =_{df} & \neg\bigcirc\neg\phi & \text{(schwaches next)} \\
\text{more} & =_{df} & \bigcirc\text{true} & \text{(mehr)} \\
\text{empty} & =_{df} & \neg\text{more} & \text{(leer)}
\end{array}
$$

Noch Mehr Formeln

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{inf} & =_{df} & \mathsf{true}^\frown\mathsf{false} & \text{(unendlich)} \\
\mathsf{fin} & =_{df} & \neg\mathsf{inf} & \text{(endlich)} \\
\Diamond\phi & =_{df} & \mathsf{fin}^\frown\phi & \text{(irgendwann)} \\
\Box\phi & =_{df} & \neg\Diamond\neg\phi & \text{(immer)} \\
\textcircled{\scriptsize i}\,\phi & =_{df} & \phi^\frown\mathsf{true} & \text{(ein Anfangintervall)} \\
\boxed{\mathsf{i}}\,\phi & =_{df} & \neg\textcircled{\scriptsize i}\neg\phi & \text{(alle Anfangsintervalle)} \\
\textcircled{\scriptsize a}\,\phi & =_{df} & \mathsf{fin}^\frown\phi^\frown\mathsf{true} & \text{(ein Subintervall)} \\
\boxed{\mathsf{a}}\,\phi & =_{df} & \neg\textcircled{\scriptsize a}\neg\phi & \text{(alle Subintervalle)}
\end{array}
$$

Bemerkungen

- ITL ist sehr ausdrucksmächtig
- ITL kann viele Eigenschaften von Systemen beschreiben (keep, halt, while, repeat,...)
- ITL kann auf kontinuierlichen Zeit erweitert werden (skip und $\bigcirc$ müssen weggelassen oder modifiziert werden)

Problem

"Es kann der Frömmste nicht in Frieden leben, wenn es dem bösen Nachbarn nicht gefällt."

Friedrich Schiller (Wilhelm Tell)

Problem

"Es kann der Frömmste nicht in Frieden leben, wenn es dem bösen Nachbarn nicht gefällt."

Friedrich Schiller (Wilhelm Tell)

- $\frown$ betrachtet nur Teilintervalle
- man kann nicht über Intervalle ausserhalb sprechen
- unbegrenzte Lebendigkeitseigenschaften können i.A. nicht beschrieben werden
- was ist mit Eigenschaften "ausserhalb" eines Intervalls, zum Beispiel "in der Zukunft gibt es ein Intervall in dem ϕ gilt"

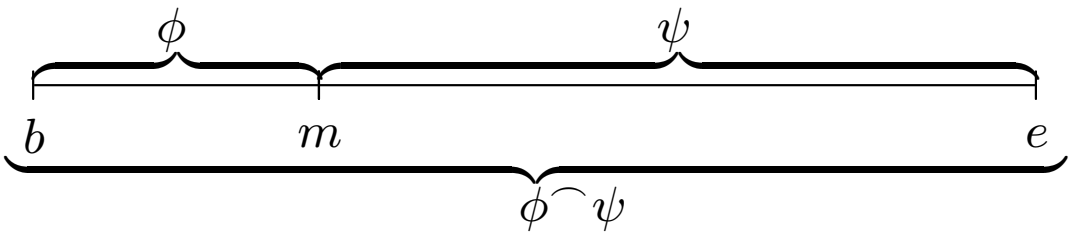
Teil II

Nachbarschaftslogik (NL)

Hintergrund

- eingeführt 1996 von Z. Chaochen, M.R. Hansen
- als Erweiterung von ITL
- die Zeitdomain ist $\mathbb{R}$
- nur auf *endlichen Intervallen*
- Erweiterung jedoch möglich (an einer Stelle problematisch)
- allgemeine Ausdrucksmächtigkeit noch nicht ganz geklärt

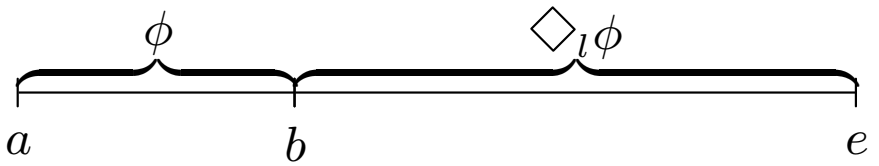
Problem von Intervalllogik



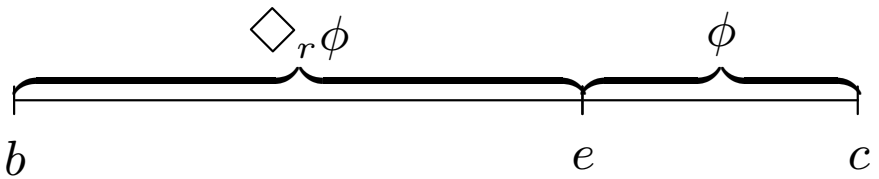
Nachbarschaftsmodalitäten

Hauptidee: Temporal Intervalllogik + zusätzliche Operatoren

Linker Nachbar:



Rechter Nachbar:



Nachbarschatfsmodalitäten

Definition

- $\Diamond_l \phi$ ("für einen linken Nachbarn gilt ϕ) ist definiert als

  $\Diamond_l \phi$ gilt für $[b, e]$ gdw. $\exists a \in \mathbb{R} : a \leq b \wedge \phi$ gilt für $[a, b]$

- $\Diamond_r \phi$ ("für einen rechten Nachbarn gilt ϕ) ist definiert als

  $\Diamond_r \phi$ gilt für $[b, e]$ gdw. $\exists c \in \mathbb{R} : c \geq e \wedge \phi$ gilt für $[e, c]$

Nachbarschaftslogik

Syntax und Semantik ist äquivalent zu ITL;
es wird lediglich $\frown$ durch die linken und rechten Nachbarn ersetzt

Syntax

die Menge von NL-Formeln ist gegeben durch

$$\phi ::= X \mid G^n(\theta_1, \ldots, \theta_n) \mid \neg\phi \mid \phi \vee \psi \mid (\exists x)\phi \mid \Diamond_l \phi \mid \Diamond_r \phi$$

Semantik

die Semantik der Formeln $\Diamond_l \phi$ und $\Diamond_r \phi$ ist definiert als

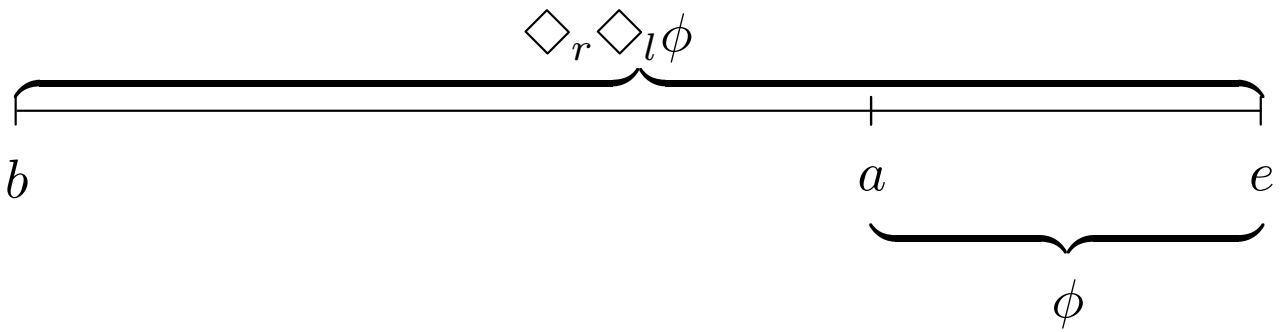
$$\begin{array}{lll} [b,e] \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \Diamond_l \phi & \text{gdw.} & \exists \delta \geq 0 : \mathcal{J}, V, [b-\delta, e] \models \phi \\ [b,e] \models_{\mathcal{J},\mathcal{V}} \Diamond_r \phi & \text{gdw.} & \exists \delta \geq 0 : \mathcal{J}, V, [e, e+\delta] \models \phi \end{array}$$

Weitere Modalitäten

$$\begin{aligned} \Box_l \phi &= \neg \Diamond_l \neg \phi \\ \Box_r \phi &= \neg \Diamond_r \neg \phi \end{aligned}$$

"$\Box_l \phi$ gilt für $[b, e]$ gdw. ϕ gilt für *alle* $[a, b]$"

$$\begin{aligned} \Diamond_l^c \phi &= \Diamond_r \Diamond_l \phi \\ \Diamond_r^c \phi &= \Diamond_l \Diamond_r \phi \end{aligned}$$



wobei $a = e - \delta$

Eigenschaften

Theorem

NL *subsumiert* ITL, *d.h. alle Formeln in* ITL *können in* NL *ausgedrückt werden.*

Beweis.

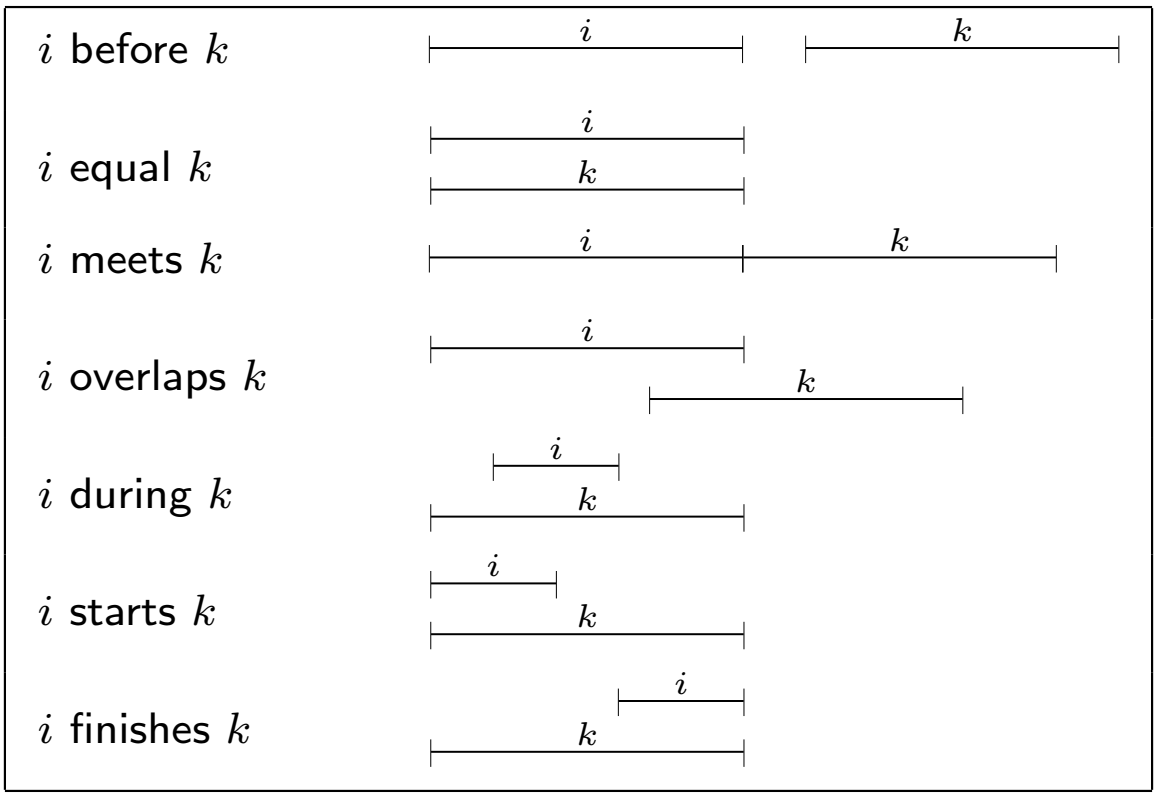
Wir müssen lediglich zeigen, dass $\frown$ darstellbar ist.

$$\phi \frown \psi \Leftrightarrow \exists x, y : ((\ell = x + y) \wedge \Diamond_r^c((\ell = x) \wedge \phi \wedge \Diamond_r((\ell = y) \wedge \psi))),$$

wobei $x + y$ die Länge des Originalintervals ist $\square$

Eigenschaften

Allens Intervall-Relationen



Lemma

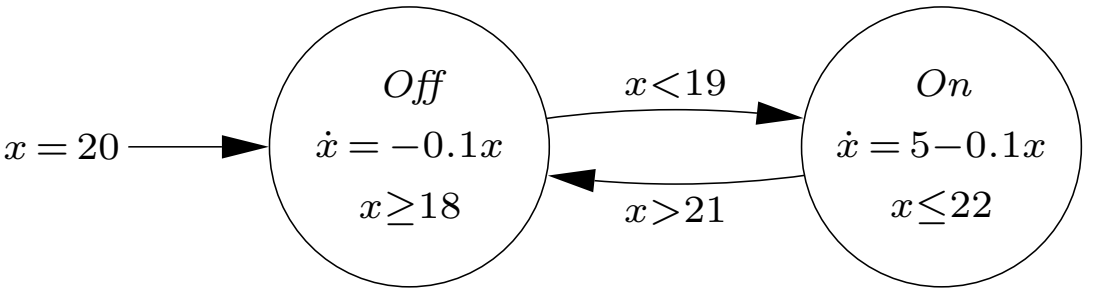
NL *kann alle 13 Intervall-Relationen von J. Allen darstellen.*

Eigenschaften

- NL ist korrekt und vollständig
- NL ist axiomatisch darstellbar
- ITL und NL können algebraisch interpretiert werden; auch hier liegt (mal wieder) ein Halbring zu Grunde

Nachbarschaftslogik und hybride Systeme

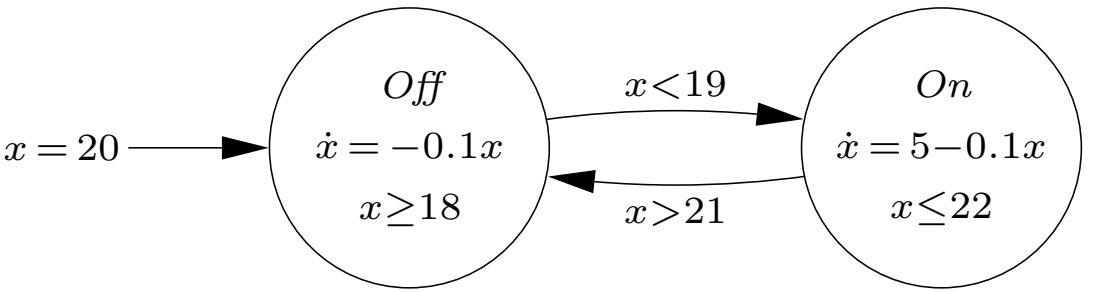
Gas-Heizung



"in der Zukunft gibt es ein Intervall, so dass die Temperatur 21 Grad ist."

Nachbarschaftslogik und hybride Systeme

Gas-Heizung

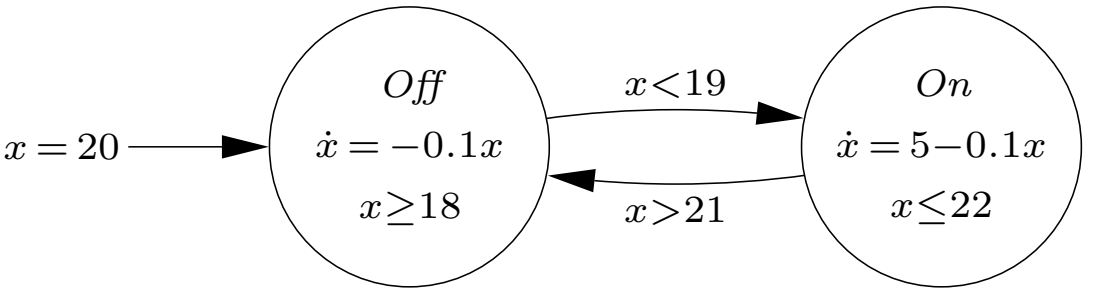


"in der Zukunft gibt es ein Intervall, so dass die Temperatur 21 Grad ist."

$$\Diamond_r \Diamond_r \{x = 21\}$$

Nachbarschaftslogik und hybride Systeme

Gas-Heizung



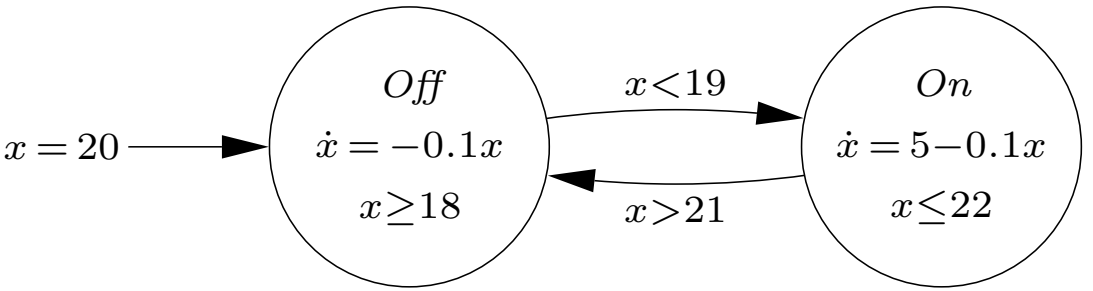
"in der Zukunft gibt es ein Intervall, so dass die Temperatur 21 Grad ist."

$$\Diamond_r \Diamond_r \{x = 21\}$$

"Die Temperatur wird unendlich oft 21 Grad sein."

Nachbarschaftslogik und hybride Systeme

Gas-Heizung



"in der Zukunft gibt es ein Intervall, so dass die Temperatur 21 Grad ist."

$$\Diamond_r \Diamond_r \{x = 21\}$$

"Die Temperatur wird unendlich oft 21 Grad sein."

$$\Box_r \Diamond_r \Diamond_r \{x = 21\}$$

Defizite von ITL und NL

offene Fragen

- Wie sieht die Intervallkomposition aus?
- Wie verhält sich $\frown$?
- Was sind rechte Nachbarn von $[b, \infty)$?

Defizite von ITL und NL

offene Fragen

- Wie sieht die Intervallkomposition aus?
  Bei der Betrachtung von Trajektorien haben wir bereits eine möglich Komposition kennen gelernt (Sion'04). Eine Alternative ist aber auch, dass man eine Komposition der Form $[b, e]; [c, \infty)$ verbietet.
- Wie verhält sich $\frown$?
- Was sind rechte Nachbarn von $[b, \infty)$?

Defizite von ITL und NL

offene Fragen

- Wie sieht die Intervallkomposition aus?
  Bei der Betrachtung von Trajektorien haben wir bereits eine möglich Komposition kennen gelernt (Sion'04). Eine Alternative ist aber auch, dass man eine Komposition der Form $[b, e]; [c, \infty)$ verbietet.
- Wie verhält sich $\frown$?
  $[b, \infty)$ kann in beliebige Teile $[b, m]$ und $[m, \infty)$ aufgeteilt werden. Je nach Kompositionsdefinition ist dann als erstes Element auch $[b, \infty)$ erlaubt
- Was sind rechte Nachbarn von $[b, \infty)$?

Defizite von ITL und NL

offene Fragen

- Wie sieht die Intervallkomposition aus?
  Bei der Betrachtung von Trajektorien haben wir bereits eine möglich Komposition kennen gelernt (Sion'04). Eine Alternative ist aber auch, dass man eine Komposition der Form $[b, e]; [c, \infty)$ verbietet.

- Wie verhält sich $\frown$?
  $[b, \infty)$ kann in beliebige Teile $[b, m]$ und $[m, \infty)$ aufgeteilt werden. Je nach Kompositionsdefinition ist dann als erstes Element auch $[b, \infty)$ erlaubt

- Was sind rechte Nachbarn von $[b, \infty)$?
  Je nach Definition scheint dies alles oder nichts zu sein. Theoretisch könnte es aber auch etwas ganz anderes sein.

Glas leer.

Ich habe fertig.